

黑龙江省伊春市第一中学 2019-2020 学年下学期高二理科期中数学试卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、下列推理是演绎推理的是 ()

A 由铜、铁、铝等金属导电，推出一切金属都能导电

B 由平面内圆的性质猜测空间中球的性质

C 一切偶数都能被 2 整除，0 是偶数，所以 0 能被 2 整除

D 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_n = 2^n - n$, 推出 $a_5 = 27$

2、命题 p: 若连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有零点，则 $f(a) \cdot f(b) < 0$; 命题 q: 若 $ab > 0$, 则 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$,

则下列命题为真命题的是 ()

A $p \wedge q$

B $p \vee q$

C $\neg p \wedge q$

D $\neg p \wedge \neg q$

3、下列命题正确的个数有 ()

① $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$

② $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

③ 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则 $|a| > |b|$

A 0

B 1

C 2

D 3

4、设命题 p: $\exists x_0 > 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 < 0$, 则 $\neg p$ 为 ()

A $\forall x > 0, e^x + \ln x - x < 0$

B $\exists x_0 > 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 \geq 0$

C $\forall x > 0, e^x + \ln x - x \geq 0$

D $\exists x_0 \leq 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 < 0$

5、用数学归纳法证明: “ $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{15}$ ” 时, 假设 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时左边改变的式子为 ()

A $\frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+5}$

B $\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+1}$

C $\frac{1}{4k+5} - \frac{1}{2k+1}$

D $\frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+5} - \frac{1}{2k+1}$

6、 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 3$ 单调递增是 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 的()条件

A 充分不必要 B 必要不充分 C 充分必要 D 既不充分也不必要

7、已知 $x \geq 3$, 则 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$ 有 ()

A 最大值 4 B 最大值 5 C 最小值 4 D 最小值 5

8、已知正数 x, y 满足 $2\sqrt{6xy} - x \leq k(x+y)$ 恒成立, 求实数 k 的最小值为 ()

A 1 B 2 C 3 D 4

9、已知函数 $f(x) = x \ln x + x^2 - 1$, 射线 $l: y = kx - k, x > 1$. 若射线 l 恒在函数 $y = f(x)$ 图象的下方, 则 k 的最大值为()

A .2 B. 3 C. 4 D. 5

10、已知不等式 $-e^{2x} + e^x - kx > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上无解, 则实数 k 的取值范围 ()

A $[-1, +\infty)$ B $[1, +\infty)$ C $(-1, +\infty)$ D $(1, +\infty)$

11、已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $2f(x) - f'(x) < 2$, $f(0) = 2020$, 则不等式 $f(x) \leq 2019e^{2x} + 1$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ()

A $[0, +\infty)$ B $(-\infty, 0)$ C $(0, +\infty)$ D $(-\infty, 0]$

12、已知函数 $f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{x}{a}$, $g(x) = \ln x$, 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq g(x)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 1\right]$ B $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 0\right)$ C $(0, 1]$ D $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 0\right) \cup (0, 1]$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、曲线 $f(x) = x \ln x + x^2 - 1$ 在点 $P(1, 0)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积是_____.

14、已知关于 x 的不等式 $x + \frac{4}{x-m} \geq 8$ 在 $x \in (m, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 m 的最小值为_____

15、圆内一条弦将圆最多分成 2 部分, 两条弦将圆最多分成 4 部分, 三条弦将圆最多分成 7

部分, 猜测圆内 6 条弦将圆最多分成 _____ 部分

16、已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ -\frac{x}{e^{x-1}}, & x \geq 0 \end{cases}$, 若方程 $[f(x)]^2 - 2tf(x) + t^2 - \frac{1}{49} = 0$ 有 4 个不等的实根, 则实数 t 的取值范围为_____

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、(1) 已知 $a, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 4$, 求 $a + 2b$ 的最小值

(2) 已知 $a, b > 0, a^2 + ab + 4b^2 = 10$, 求 $a + 2b$ 的最大值

18、(1) 实数 a, b, c 满足 $a + b = -2c^2 - 6, a - b = c^2 + 4c + 5$, 比较 a, b, c 大小

(2) 若 a, b, c 均为实数, 且 $a = x^2 - 1, b = y^2 - 2x + y, c = 3 - \frac{3}{4}y^2$, 证明 a, b, c 中至少有一个大于等于 0。

19、已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(1) 求函数的单调性和极值

(2) 过点 $P(1, 1)$ 作函数 $f(x)$ 的切线, 求切线方程

20、已知函数 $f(x) = x \ln x - ae^x + a$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程

(2) 若 $f(x)$ 在定义域内是单调函数, 求 a 的范围。

21、已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - mx$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$

(1) 求实数 m 的取值范围

(2) 若 $\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{10}{3}$, 求 $f(x_2) - f(x_1)$ 的范围

22、函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x}$, $g(x) = 3(ax-1)e^x - x - \frac{1}{x} + m$,

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$, $x \in (0,1]$ 时 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求整数 m 的最大值。