

黑龙江省伊春市第一中学 2019-2020 学年下学期高二理科期中数学试卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、下列推理是演绎推理的是 ( )

A 由铜、铁、铝等金属导电，推出一切金属都能导电

B 由平面内圆的性质猜测空间中球的性质

C 一切偶数都能被 2 整除，0 是偶数，所以 0 能被 2 整除

D 数列  $\{a_n\}$  中， $a_n = 2^n - n$ , 推出  $a_5 = 27$

2、命题 p: 若连续函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有零点，则  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ; 命题 q: 若  $ab > 0$ , 则  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ,

则下列命题为真命题的是 ( )

A  $p \wedge q$       B  $p \vee q$       C  $\neg p \wedge q$       D  $\neg p \wedge \neg q$

3、下列命题正确的个数有 ( )

①  $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$

②  $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

③ 若  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则  $|a| > |b|$

A 0              B 1              C 2              D 3

4、设命题 p:  $\exists x_0 > 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 < 0$ , 则  $\neg p$  为 ( )

A  $\forall x > 0, e^x + \ln x - x < 0$               B  $\exists x_0 > 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 \geq 0$

C  $\forall x > 0, e^x + \ln x - x \geq 0$               D  $\exists x_0 \leq 0, e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 < 0$

5、用数学归纳法证明：“ $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{15}$ ”时，假设  $n=k$  时不等式成立，则

$n=k+1$  时左边改变的式子为 ( )

A  $\frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+5}$       B  $\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+1}$       C  $\frac{1}{4k+5} - \frac{1}{2k+1}$       D  $\frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+5} - \frac{1}{2k+1}$

6、 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 3$  单调递增是  $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$  的( )条件

A 充分不必要 B 必要不充分 C 充分必要 D 既不充分也不必要

7、已知  $x \geq 3$ , 则  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$  有 ( )

A 最大值 4 B 最大值 5 C 最小值 4 D 最小值 5

8、已知正数  $x, y$  满足  $2\sqrt{6xy} - x \leq k(x+y)$  恒成立, 求实数  $k$  的最小值为 ( )

A 1 B 2 C 3 D 4

9、已知函数  $f(x) = x \ln x + x^2 - 1$ , 射线  $l: y = kx - k, x > 1$ . 若射线  $l$  恒在函数  $y = f(x)$  图象的下方, 则  $k$  的最大值为( )

A .2 B .3 C .4 D .5

10、已知不等式  $-e^{2x} + e^x - kx > 0$  在  $[0, +\infty)$  上无解, 则实数  $k$  的取值范围 ( )

A  $[-1, +\infty)$  B  $[1, +\infty)$  C  $(-1, +\infty)$  D  $(1, +\infty)$

11、已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数, 其导函数为  $f'(x)$ , 若  $2f(x) - f'(x) < 2$ ,  $f(0) = 2020$ , 则不等式  $f(x) \leq 2019e^{2x} + 1$  (其中  $e$  为自然对数的底数) 的解集为 ( )

A  $[0, +\infty)$  B  $(-\infty, 0)$  C  $(0, +\infty)$  D  $(-\infty, 0]$

12、已知函数  $f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{x}{a}$ ,  $g(x) = \ln x$ , 若对于任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(x) \geq g(x)$ , 则实数

$a$  的取值范围是 ( )

A  $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 1\right]$  B  $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 0\right)$  C  $(0, 1]$  D  $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 0\right) \cup (0, 1]$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、曲线  $f(x) = x \ln x + x^2 - 1$  在点  $P(1, 0)$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积是\_\_\_\_\_.

14、已知关于  $x$  的不等式  $x + \frac{4}{x-m} \geq 8$  在  $x \in (m, +\infty)$  上恒成立, 则实数  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_

15、圆内一条弦将圆最多分成 2 部分, 两条弦将圆最多分成 4 部分, 三条弦将圆最多分成 7

部分, 猜测圆内 6 条弦将圆最多分成 \_\_\_\_\_ 部分

16、已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \frac{x}{e^{x-1}}, & x \geq 0 \end{cases}$  若方程  $[f(x)]^2 - 2tf(x) + t^2 - \frac{1}{49} = 0$  有 4 个不等的实根, 则实

数  $t$  的取值范围为\_\_\_\_\_

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、(1) 已知  $a, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 4$ , 求  $a + 2b$  的最小值

(2) 已知  $a, b > 0, a^2 + ab + 4b^2 = 10$ , 求  $a + 2b$  的最大值

18、(1) 实数  $a, b, c$  满足  $a + b = -2c^2 - 6, a - b = c^2 + 4c + 5$ , 比较  $a, b, c$  大小

(2) 若  $a, b, c$  均为实数, 且  $a = x^2 - 1, b = y^2 - 2x + y, c = 3 - \frac{3}{4}y^2$ , 证明  $a, b, c$  中至少有一个大于等于 0。

19、已知函数  $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(1) 求函数的单调性和极值

(2) 过点  $P(1, 1)$  作函数  $f(x)$  的切线, 求切线方程

20、已知函数  $f(x) = x \ln x - ae^x + a$

(1) 当  $a = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程

(2) 若  $f(x)$  在定义域内是单调函数, 求  $a$  的范围。

21、已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - mx$  有两个极值点  $x_1, x_2$  且  $x_1 < x_2$

(1) 求实数  $m$  的取值范围

(2) 若  $\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{10}{3}$ , 求  $f(x_2) - f(x_1)$  的范围

22、函数  $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 3(ax-1)e^x - x - \frac{1}{x} + m$ ,

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $a = \frac{1}{2}$ ,  $x \in (0,1]$  时  $f(x) > g(x)$  恒成立, 求整数  $m$  的最大值。