100所名校高考模拟金典卷·数学(五)

(120分钟　150分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.若 $a+\mathrm{i}=t\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$(i为虚数单位,$a,t\in\mathbf{R}$),则 $t+a\mathrm{i}$ 等于

A. $1-2\mathrm{i}$　　B. $1+2\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

答案　A

命题意图　本题考查复数的运算.

解题分析　因为 $a+\mathrm{i}=t\mathrm{i}\cdot(1+2\mathrm{i})=t\mathrm{i}-2t$,则 $\begin{cases}t=1,\\a=-2t\end{cases}\Rightarrow a=-2$.所以 $t+a\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$.

2.已知集合 $A=\{x|y=\log_2(3-2x)\}$,$B=\{x|x^2>4\}$,则 $A\cup\complement_{\mathbf{R}}B=$

A. $\{x|-2\leqslant x<\frac{3}{2}\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|-2<x<\frac{3}{2}\}$　　D. $\{x|x\leqslant 2\}$

答案　D

命题意图　本题考查集合的补集与并集.

解题分析　因为 $A=\{x|y=\log_2(3-2x)\}=\{x|3-2x>0\}=\{x|x<\frac{3}{2}\}$,$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$.所以 $A\cup\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant 2\}$.

3.已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,若 $P(\xi<2)=P(\xi>6)=0.15$,则 $P(2\leqslant\xi<4)$ 等于

A. 0.3　　B. 0.35　　C. 0.5　　D. 0.7

答案　B

命题意图　本题考查正态分布.

解题分析　由题意可得 $P(2\leqslant\xi<4)=\frac{1-0.15\times 2}{2}=0.35$.

4.已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导,则“$f'(x_0)=0$”是“$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极值”的

A.充分不必要条件

B.充要条件

C.必要不充分条件

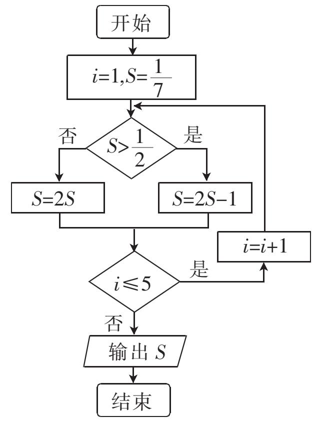
D.既不充分也不必要条件

答案　C

命题意图　本题考查必要不充分条件.

解题分析　由“$f'(x_0)=0$”不可以推出“$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极值”,同时由“$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极值”可以推出“$f'(x_0)=0$”,所以“$f'(x_0)=0$”是“$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极值”的必要不充分条件.

5. 执行如右图所示的程序框图,输出的 S 为



A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{4}{7}$

D. $\frac{6}{7}$

答案　A

命题意图　本题考查程序框图.

解题分析　考虑进入循环状态,根据程序框图可知,

当 $i=1$ 时,有 $S=\frac{2}{7}$;当 $i=2$ 时,有 $S=\frac{4}{7}$;

当 $i=3$ 时,有 $S=\frac{1}{7}$;当 $i=4$ 时,有 $S=\frac{2}{7}$;

当 $i=5$ 时,有 $S=\frac{4}{7}$;当 $i=6$ 时,有 $S=\frac{1}{7}$.所以输出的 $S=\frac{1}{7}$.

6. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,其前 n 项和为 S_n,$2a_7+6=a_8$,则 S_{11} 为

A. 66　　B. 55　　C. -66　　D. -55

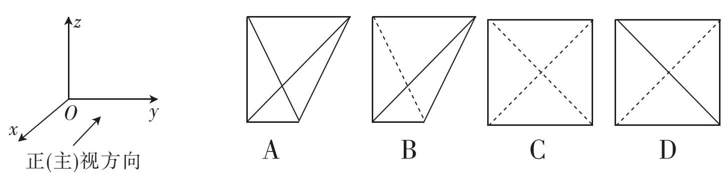
答案　C

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解题分析　$2a_7-a_8=2(a_1+6d)-(a_1+7d)=a_1+5d=a_6=-6$,

$S_{11}=11\times\frac{a_1+a_{11}}{2}=11a_6=-66$.

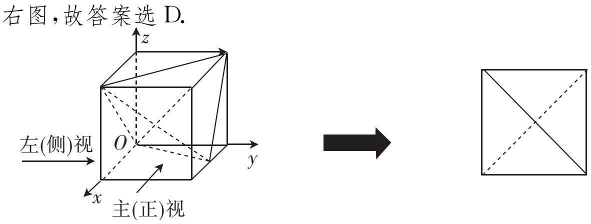
7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是(0,0,0),(1,0,1),(0,1,1),($\frac{1}{2}$,1,0),按照如下图所示的方向绘制该四面体的三视图,则得到的正(主)视图可以为



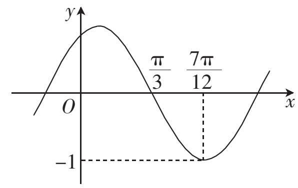
答案　D

命题意图　本题考查三视图及空间点的坐标.

解题分析　满足条件的四面体如左图,依题意投影到 yOz 平面为正投影,所以正(主)视方向如图所示,所以得到正(主)视图效果如右图,故答案选 D.



8. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $\omega, A>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$)的图象如图所示，为了得到 $g(x)=3\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})$的图象，则只要将 $f(x)$的图象上所有的点



A. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$，横坐标不变

B. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标伸长到原来的3倍，横坐标不变

C. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$，横坐标不变

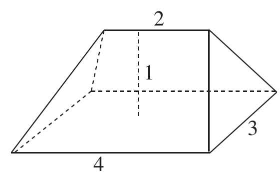
D. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标伸长到原来的3倍，横坐标不变

答案　D

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解题分析　因为 $f(x)$的最小值为−1，所以 $A=1$，再由对称中心与对称轴的距离可得周期 $T=4(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{3})=\pi$，从而 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 因为 $f(x)$过点$(\frac{7\pi}{12},-1)$，所以 $\sin(\frac{7}{6}\pi+\varphi)=-1$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. 则需将 $f(x)$向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，即 $f(x-\frac{\pi}{3})=\sin[2(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，然后再将 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的横坐标不变，纵坐标伸长到原来的3倍，得到 $g(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

9.《九章算术》卷第五《商功》中，提到这样一种立体图形：“今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈.”，意思是：“今有底面为矩形的屋脊状的楔体，下底面宽3丈，长4丈；上棱长2丈，无宽，高1丈(如图).”对于这个立体图形，如果将上棱长缩短至1丈，那么它的体积为



A. $\frac{9}{2}$立方丈　　B. 5立方丈

C. 4立方丈　　D. 6立方丈

答案　A

命题意图　本题考查数学文化及立体几何体的体积.

解题分析　将该几何体分成一个直三棱柱，两个四棱锥，即 $V=\frac{1}{2}\times3\times1\times1+\frac{1}{3}\times(12-3)\times1=\frac{9}{2}$.

10. 已知抛物线 $C: y^2=4x$，过焦点 F 且斜率为$\sqrt{3}$的直线与 C 相交于 P, Q 两点，且 P, Q 两点在准线上的投影分别为 M, N 两点，则 $S_{\triangle MFN}=$

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

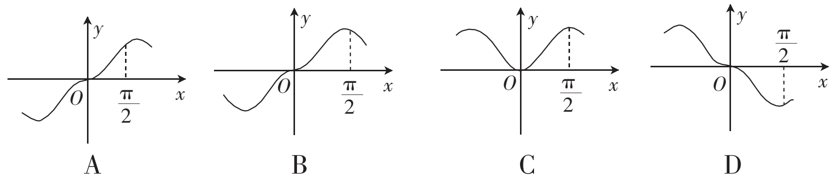
答案　B

命题意图　本题考查直线与抛物线综合.

解题分析　由题意可得直线 $PQ: y=\sqrt{3}(x-1)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 联立解得 $3x^2-10x+3=0$，

所以点 $P(3,2\sqrt{3})$，$Q(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3})$，则 $|MN|=2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 在 $\triangle MNF$ 中，MN 边上的高 $h=2$，则 $S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

11. 函数 $y=\frac{2x^2\sin x}{1+x^2}(x\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}])$ 的图象大致是



答案　A

命题意图　本题考查函数的图象.

解题分析　因为函数 $f(x)=\frac{2x^2\sin x}{x^2+1}$，可知函数为奇函数关于原点对称，可排除答案 C；同时有 $y'=f'(x)=\frac{4x\sin x+2x^4\cos x+2x^2\cos x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(2\sin x+x^3\cos x+x\cos x)}{(x^2+1)^2}$，则当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$f'(x)>0$，可知函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处附近单调递增，排除答案 B 和 D.

12. 若对圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$，$|3x-4y+a|+|3x-4y-9|$ 的取值与 x,y 无关，则实数 a 的取值范围是

A. $a\leqslant-4$　　B. $-4\leqslant a\leqslant6$

C. $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant6$　　D. $a\geqslant6$

答案　D

命题意图　本题考查直线与圆.

解题分析　要使符合题意. 则圆上所有点在直线 $l_1: 3x-4y+a=0$，$l_2: 3x-4y-9=0$ 之间，

因为圆心到直线 l_2 的距离 $d=\frac{|3-4-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2>1$，且 $3\times1-4\times1-9<0$，所以圆心到直线 l_1 的距离 $d_1=\frac{|3-4+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\geqslant1$，且 $3\times1-4\times1+a\geqslant0$，解得 $a\geqslant6$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则实数 x 等于________.

答案　7

命题意图　本题考查平面向量的运算.

解题分析　因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3-x,3)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}\Rightarrow(3-x)\times3+3\times4=0\Rightarrow x=7$.

14. 设 $(x^2-3x+2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 a_1 等于________.

答案　-240

命题意图　本题考查二项式定理.

解题分析　$(x^2-3x+2)^5=C_5^0(2-3x)^5+C_5^1(2-3x)^4x^2+\cdots+C_5^5(2-3x)^0(x^2)^5$，所以 $a_1=C_5^0C_5^12^4(-3)^1=-240$.

15. 已知在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=2CD=4$，$\angle BAD=60^\circ$，双曲线以 A，B 为焦点，且与线段 CD（包括端点 C、D）有两个交点，则该双曲线的离心率的取值范围是________.

答案 $[\sqrt{3}+1,+\infty)$

命题意图 本题考查双曲线的离心率.

解题分析 当双曲线过点 C 时，$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{AB}{CA-CB}=\sqrt{3}+1$，开口越大，离心率越大.

16. 已知首项为 4 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=4a_na_{n+1}+1$，若 $S=a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_9a_{10}$，则 S 的值为________.

答案 4

命题意图 本题考查数列的周期性.

解题分析 由 $a_{n+1}+a_n=4a_na_{n+1}+1$，整理得 $(a_{n+1}-1)(1-a_n)=3a_na_{n+1}$ 得 $\dfrac{(a_{n+1}-1)(1-a_n)}{a_na_{n+1}}=3$，令 $d_n=\dfrac{1-a_n}{a_n}$，则 $d_nd_{n+1}=-3$，所以 $d_{n+1}=-\dfrac{3}{d_n}$，$d_{n+2}=-\dfrac{3}{d_{n+1}}=d_n$，所以数列 $\{d_n\}$ 是周期为 2 的周期数列，即数列 $\{a_n\}$ 是周期为 2 的周期数列，由 $a_1=4$ 得 $a_2=\dfrac{1}{5}$，所以 $S=a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_9a_{10}=4$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知锐角 $\triangle ABC$ 的角 A，B，C 所对边分别是 a，b，c，且 $2\sin A\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3}{2}$.

(1) 求角 A；

(2) 若角 A 的平分线交 BC 于点 D，且 $AD=\sqrt{2}BD=2$，求 a.

命题意图 本题考查解三角形及三角恒等变换.

解题分析 (1) 因为 $2\sin A\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=2\sin A(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)=\sqrt{3}\sin A\cos A+\sin^2 A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A+\dfrac{1}{2}=\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 $2A-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，得 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………… 6 分

(2) $\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$C=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{12}\pi$，$\angle CDA=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$，

所以 $AC=AD=2$，$DC=2AD\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

所以 $a=BD+DC=\sqrt{6}$. ………………………………………………………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

近年来随着我国在教育科研上的投入不断加大，科学技术得到迅猛发展，国内企业的国际竞争力得到大幅提升. 伴随着国内市场增速放缓，国内有实力企业纷纷进行海外布局，第二轮

企业出海潮到来.如在智能手机行业,国产品牌已在赶超国外巨头,某品牌手机公司一直默默拓展海外市场,在海外共设30多个分支机构,需要国内公司外派大量80后、90后中青年员工.该企业为了解这两个年龄层员工是否愿意被外派工作的态度,按分层抽样的方式从80后和90后的员工中随机调查了100位,得到数据如下表:

	愿意被外派	不愿意被外派	合计
80后	20	20	40
90后	40	20	60
合计	60	40	100

(1)根据调查的数据,是否有99%的把握认为"是否愿意被外派与年龄有关",并说明理由;

(2)该公司举行参观驻海外分支机构的交流体验活动,拟安排6名参与调查的80后、90后员工参加.80后员工中有愿意被外派的3人和不愿意被外派的3人报名参加,从中随机选出3人,记选到愿意被外派的人数为x;90后员工中有愿意被外派的4人和不愿意被外派的2人报名参加,从中随机选出3人,记选到愿意被外派的人数为y,求$x<y$的概率.

参考数据:

$P(K^2>k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

(参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中$n=a+b+c+d$).

命题意图　本题考查统计与概率综合.

解题分析　(1)K^2的观测值为$k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(20\times20-40\times20)^2}{60\times40\times60\times40}$

$=\dfrac{400\times400\times100}{5760000}\approx2.778<6.635$,

所以没有99%的把握认为"是否愿意被外派与年龄有关". …………………………………… 5分

(2)"$x<y$"包含:"$x=0,y=1$"、"$x=0,y=2$"、"$x=0,y=3$"、"$x=1,y=2$"、"$x=1,y=3$"、"$x=2,y=3$"六个互斥事件,

且$P(x=0,y=1)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{4}{400}$,$P(x=0,y=2)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{12}{400}$,

$P(x=0,y=3)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{4}{400}$,$P(x=1,y=2)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{108}{400}$,

$P(x=1,y=3)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{36}{400}$,$P(x=2,y=3)=\dfrac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}\times\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{36}{400}$,

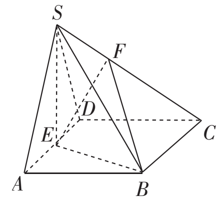
所以$P(x<y)=\dfrac{4+12+4+108+36+36}{400}=\dfrac{200}{400}=\dfrac{1}{2}$. …………………………………… 12分

19.(本小题满分12分)

已知在四棱锥$S-ABCD$中,底面$ABCD$是边长为2的菱形,$\angle BAD=60°$,$SA=SD=\sqrt{5}$,$SB=\sqrt{7}$,点E是棱AD的中点,点F在棱SC上,且$\overrightarrow{SF}=\lambda\overrightarrow{SC}$,$SA$//平面$BEF$.

(1)求实数 λ 的值;

(2)求二面角 $S-BE-F$ 的正切值.



命题意图 本题考查空间几何体及空间向量的应用.

解题分析 (1)连接 AC,设 $AC\cap BE=G$,

则平面 $SAC\cap$平面 $EFB=FG$,

$\because SA/\!/$平面 EFB,$\therefore SA/\!/FG$,

$\because \triangle GEA\backsim\triangle GBC$,$\therefore \frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{SF}{FC}=\frac{AG}{GC}=\frac{1}{2}\Rightarrow SF=\frac{1}{3}SC$,$\therefore \lambda=\frac{1}{3}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)$\because SA=SD=\sqrt{5}$,$\therefore SE\perp AD$,$SE=2$,

又$\because AB=AD=2$,$\angle BAD=60^\circ$,$\therefore BE=\sqrt{3}$

$\therefore SE^2+BE^2=SB^2$,$\therefore SE\perp BE$,$\therefore SE\perp$平面 $ABCD$,

以 EA,EB,ES 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$S(0,0,2)$,平面 SEB 的法向量 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{EA}=(1,0,0)$,

设平面 EFB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},0)=0\Rightarrow y=0$,

$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{GF}\Rightarrow\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AS}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(-1,0,2)=0\Rightarrow x=2z$,

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$,$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

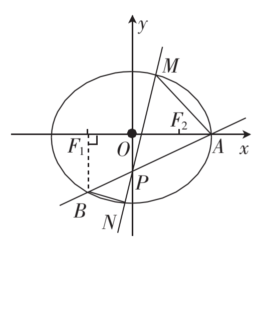
即所求二面角的正切值是$\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

20.(本小题满分 12 分)

如图,椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为 $A(2,0)$,左、右焦点分别为 F_1、F_2,过点 A 且斜率为$\frac{1}{2}$的直线与 y 轴交于点 P,与椭圆 C 交于另一个点 B,且点 B 在 x 轴上的射影恰好为点 F_1.

(1)求点 B 的坐标;

(2)过点 P 且斜率大于$\frac{1}{2}$的直线与椭圆交于 M,N 两点($|PM|>|PN|$),若 $S_{\triangle PAM}:S_{\triangle PBN}=\lambda$,求实数 λ 的取值范围.



命题意图 本题考查直线与椭圆综合.

解题分析 (1)因为 $BF_1\perp x$ 轴,得到点 $B(-c,-\frac{b^2}{a})$,

所以$\begin{cases}a=2,\\ \frac{b^2}{a(a+c)}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$,所以点 B 的坐标为$(-1,-\frac{3}{2})$. ………… 5 分

(2)因为$\frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBN}}=\frac{\frac{1}{2}PA\cdot PM\cdot \sin\angle APM}{\frac{1}{2}PB\cdot PN\cdot \sin\angle BPN}=\frac{2PM}{PN}=\lambda\Rightarrow\frac{PM}{PN}=\frac{\lambda}{2}(\lambda>2)$,

所以$\overrightarrow{PM}=-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{PN}$.

由(1)可知 $P(0,-1)$,椭圆 C 的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

设 MN 方程为 $y=kx-1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

联立方程$\begin{cases}y=kx-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

得$(4k^2+3)x^2-8kx-8=0$,即得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\frac{-8}{4k^2+3}\end{cases}$ (*)

又$\overrightarrow{PM}=(x_1,y_1+1)$,$\overrightarrow{PN}=(x_2,y_2+1)$,有 $x_1=-\frac{\lambda}{2}x_2$,

将 $x_1=-\frac{\lambda}{2}x_2$ 代入(*)可得$\frac{(2-\lambda)^2}{\lambda}=\frac{16k^2}{4k^2+3}$.

因为 $k>\frac{1}{2}$,有$\frac{16k^2}{4k^2+3}=\frac{16}{\frac{3}{k^2}+4}\in(1,4)$,

则 $1<\frac{(2-\lambda)^2}{\lambda}<4$ 且 $\lambda>2\Rightarrow4<\lambda<4+2\sqrt{3}$.

综上所述,实数 λ 的取值范围为$(4,4+2\sqrt{3})$. ………………………………… 12 分

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln(x-1)-x(ax-b)$($a,b\in\mathbf{R}$,a,b 为常数,e 为自然对数的底数).

(1)当 $a=-1$ 时,讨论函数 $f(x)$在区间$(\frac{1}{e}+1,e+1)$上极值点的个数;

(2)当 $a=1,b=e+2$ 时,对任意的 $x\in(1,+\infty)$都有 $f(x)<ke^{\frac{1}{2}x}$成立,求正实数 k 的取值范围.

命题意图 本题考查函数与导数综合及不等式恒成立问题.

解题分析 (1)当 $a=-1$ 时,$f'(x)=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}+2x+b$,记 $g(x)=f'(x)-b$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+2=\frac{2x\cdot(x-\frac{3}{2})}{(x-1)^2}$,$g'(x)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$,

当 $x\in(1+\frac{1}{e},\frac{3}{2})$时,$g'(x)<0$,$x\in(\frac{3}{2},e+1)$时,$g'(x)>0$,

所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$g(x)$取得极小值 $6-\ln 2$,又 $g(\frac{1}{e}+1)=e+\frac{2}{e}+2$,$g(e+1)=2e+\frac{1}{e}+4$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=-b$, ………………………………… 3 分

(i)当$-b\leqslant6-\ln 2$,即 $b\geqslant\ln 2-6$ 时,$f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$在区间$(\frac{1}{e}+1,e+1)$上无极值点;

(ⅱ)当 $6-\ln 2<-b<e+\frac{2}{e}+2$ 即 $-e-\frac{2}{e}-2<b<\ln 2-6$ 时,$f'(x)=0$ 有两不同解,

函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}+1,e+1)$ 上有两个极值点;

(ⅲ)当 $e+\frac{2}{e}+2\leqslant -b<2e+\frac{1}{e}+4$ 即 $-2e-\frac{1}{e}-4<b\leqslant -e-\frac{2}{e}-2$ 时,$f'(x)=0$ 有一解,

函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}+1,e+1)$ 上有一个极值点;

(ⅳ)当 $-b\geqslant 2e+\frac{1}{e}+4$ 即 $b\leqslant -2e-\frac{1}{e}-4$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}+1,e+1)$ 上无极值点.

……………………………………………………………………………………………… 8 分

(2)当 $a=1,b=e+2$ 时,对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f(x)<k\cdot e^{\frac{1}{2}x}$,

即 $x\ln(x-1)-x^2+(e+2)x<ke^{\frac{x}{2}}$,即 $\ln(x-1)-x+e+2<k\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}$

记 $h(x)=\ln(x-1)-x+e+2,\varphi(x)=k\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}$,

由 $h'(x)=\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$,当 $1<x<2$ 时 $h'(x)>0$,当 $x>2$ 时,$h'(x)<0$,

所以当 $x=2$ 时,$h(x)$ 取得最大值,最大值为 $h(2)=e$,

又 $\varphi'(x)=k\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}x-e^{\frac{x}{2}}}{x^2}=\frac{\frac{k}{2}e^{\frac{x}{2}}(x-2)}{x^2}$,当 $1<x<2$ 时,$\varphi'(x)<0$,当 $x>2$ 时,$\varphi'(x)>0$,

所以当 $x=2$ 时,$\varphi(x)$ 取得最小值 $\frac{ke}{2}$,所以只需要 $e<\frac{ke}{2}\Rightarrow k>2$,即正实数 k 的取值范围是 $(2,+\infty)$. …

……………………………………………………………………………………………… 12 分

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-t,\\ y=\sqrt{3}-\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数). 在以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+4=0$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)设直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,求 $|OA|\cdot|OB|$.

命题意图 本题考查极坐标与参数方程.

解题分析 (1)直线 l 的普通方程是 $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$,即 $y=\sqrt{3}x$,

曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-4x-2\sqrt{3}y+4=0$,即 $(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$. ………………… 5 分

(2)直线 l 的极坐标方程是 $\theta=\frac{\pi}{3}$,代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-5\rho+4=0$,

所以 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_A\rho_B|=4$. ……………………………………………………… 10 分

23.[选修 4—5:不等式选讲](本小题满分 10 分)

已知 $f(x)=|2x+3|,g(x)=|2x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)<g(x)+2$ 的解集;

(2)若存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)>g(x+1)+|3a-2|$ 成立,求实数 a 的取值范围.

命题意图　本题考查绝对值不等式.

解题分析　(1)不等式 $f(x)<g(x)+2$ 等价于 $\begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\-(2x+3)+(2x-1)<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\(2x+3)+(2x-1)<2\end{cases}$

或 $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\(2x+3)-(2x-1)<2\end{cases}$，解得 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}\leqslant x<0$，

所以不等式 $f(x)<g(x)+2$ 的解集是 $(-\infty,0)$. …………………………………………………… 5 分

(2)$\because f(x)-g(x+1)=|2x+3|-|2x+1|\leqslant|2x+3-2x-1|=2$，

$\therefore |3a-2|<2$，故实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{4}{3})$. …………………………………………………… 10 分

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	C	A	C	D	D	A	B	A	D