上海中学高一期末数学试卷　　2019.01

一. 填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\ln(x-1)$ 的定义域为________

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x}$ 为奇函数，则实数 a 的值为________

3. 已知 $y=\log_a x+2$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像恒过定点 P，点 P 在指数函数 $y=f(x)$ 的图像上，则 $f(x)=$

4. 方程 $9^{2x+1}=(\dfrac{1}{3})^x$ 的解为________

5. 对任意正实数 x、y，$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(9)=4$，则 $f(\sqrt{3})=$________

6. 已知幂函数 $f(x)=(m^2-5m+7)x^m$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 m 的值为________

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x & x\leq 0\\ \log_2 x & 0<x\leq 1\end{cases}$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(\dfrac{1}{2})$ 的值为________

8. 函数 $y=\log_{\frac{3}{4}}|x^2-6x+5|$ 的单调递增区间为________

9. 若函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+2)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）满足：对任意 x_1、x_2，当 $x_1<x_2\leq\dfrac{a}{2}$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，则 a 的取值范围为________

10. 已知 $a>0$，定义 $f(x)$ 表示不小于 x 的最小整数，若 $f(3x+f(x))=f(6.5)$，则正数 x 的取值范围为________

11. 若函数 $f(x)=\log_a(mx+2)-\log_a(2m+1+\dfrac{2}{x})$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）有且仅有一个零点，则实数 m 的取值范围为________

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(1-x) & -1\leq x\leq n\\ 2^{2-|x-1|}-3 & n<x\leq m\end{cases}$ $(n<m)$ 的值域是 $[-1,1]$，有下列结论：（1）$n=0$ 时，$m\in(0,2]$；（2）$n=\dfrac{1}{2}$ 时，$m\in(\dfrac{1}{2},2]$；（3）$n\in[0,\dfrac{1}{2})$ 时，$m\in(n,2]$，其中正确的结论的序号为______

二. 选择题

13. 下列函数中，是奇函数且在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数的是（　　）

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$　　B. $f(x)=3^{|x|}$　　C. $f(x)=-x^3$　　D. $f(x)=-\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$

14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，若实数 m 满足 $f(|m-1|)>f(-1)$，则 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　　C. $(0,2)$　　D. $(2,+\infty)$

15. 如果函数 $f(x)$ 在其定义域内存在实数 x_0，使得 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为“可拆分函数”，若 $f(x)=\lg\dfrac{a}{2^x+1}$ 为“可拆分函数”，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　　B. $(\frac{3}{2},3)$　　C. $(\frac{3}{2},3]$　　D. $(3,+\infty]$

16. 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{1}{1+f(x-1)}$，当 $x\in(-1,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}-1$，若 $g(x)=|f(x)-\frac{1}{2}|-mx-m$ 在 $(-1,1)$ 内恰有 3 个零点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{4},\frac{9}{16})$　　B. $[\frac{1}{4},\frac{9}{16})$　　C. $[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

三. 解答题

17. 已知函数 $f(x)=2^x-1$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，$g(x)=\log_4(3x+1)$.

（1）画出 $f(x)=2^x-1$ 的图像；（2）解方程 $f^{-1}(x)=g(x)$.

18. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)=ka^x-a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$，$k\in\mathbf{R}$）.

（1）求 k 的值，并用定义证明当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

（2）已知 $f(1)=\dfrac{3}{2}$，求函数 $g(x)=a^{2x}+a^{-2x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的取值范围.

19. 松江有轨电车项目正在如火如荼的进行中，通车后将给市民出行带来便利，已知某条线路通车后，电车的发车时间间隔t（单位：分钟）满足$2 \le t \le 20$，经市场调研测试，电车载客量与发车时间间隔t相关，当$10 \le t \le 20$时电车为满载状态，载客量为400人，当$2 \le t \le 10$时，载客量会减少，减少的人数与$(10-t)$的平方成正比，且发车时间间隔为2分钟时的载客量为272人，记电车载客量为$p(t)$.

（1）求$p(t)$的表达式；

（2）若该线路每分钟的净收益为$Q=\dfrac{6p(t)-1500}{t}-60$（元），问当发车时间间隔为多少时，该线路每分钟的净收益最大？

20. 对于定义域为D的函数$y=f(x)$，若存在区间$[a,b]\subset D$，使得$f(x)$同时满足：①$f(x)$在$[a,b]$上是单调函数，②当$f(x)$的定义域为$[a,b]$时，$f(x)$的值域也为$[a,b]$，则称区间$[a,b]$为该函数的一个“和谐区间”.

（1）求出函数$f(x)=x^3$的所有“和谐区间” $[a,b]$；

（2）函数$f(x)=|\dfrac{4}{x}-3|$是否存在“和谐区间” $[a,b]$？若存在，求出实数a、b的值；若不存在，请说明理由.

（3）已知定义在$(2,k)$上的函数$f(x)=2m-\dfrac{4}{x-1}$有“和谐区间”，求正整数k取最小值时实数m的取值范围.

21. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$g(x)$和二次函数$h(x)$满足：$g(x)+2g(-x)=e^x+\dfrac{2}{e^x}-9$，$h(-2)=h(0)=1$，$h(-3)=-2$.

（1）求$g(x)$和$h(x)$的解析式；

（2）若对于$x_1,x_2\in[-1,1]$，均有$h(x_1)+ax_1+5\ge g(x_2)+3-e$成立，求$a$的取值范围；

（3）设$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>0 \\ h(x) & x\le 0 \end{cases}$，在（2）的条件下，讨论方程$f[f(x)]=a+5$的解的个数.