

高一数学国庆复习卷(3)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题:

1. 已知集合 $M=(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$, $N=\{y|-2 \leq y \leq 5\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N =$ _____.

答案: $[-2, 1)$

2. 函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$ 的定义域为_____.

答案: $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

3. 设集合 $M=\{-1, 0, 1\}$, $N=\{a, a^2\}$, 若 $M \cup N = M$, 则实数 a 的值为_____.

答案: -1

4. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3}, & x < 0, \\ 4-x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(6))$ 的值为_____.

答案: $-\frac{2}{5}$

5. 设 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增, 则 $f(-2), f(\pi), f(-3)$ 按照从小到大的顺序排列是_____.

答案: $f(-2), f(-3), f(\pi)$

6. 函数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in (-3, 0]$ 的值域为_____.

答案: $[-4, 0)$

7. 若函数 $g(x) = 1 - 2x$, 且函数 $f(x)$ 满足 $f(g(x)) = \frac{1-x^2}{x^2}$, 则 $f(\frac{1}{2})$ 的值为_____.

答案: 15

8. 若函数 $f(x) = x^2 - ax - 1$ 在区间 $[-1, 2)$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $\{a|a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 4\}$

9. 设函数 $f(x)$ 在其定义域上是奇函数, $g(x)$ 在其定义域上是偶函数, 满足 $f(x) + g(x) = \frac{x}{x-2}$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

答案: $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

10. 设 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调减, 且 $f(2) = 0$, 若满足 $f(a-1) > 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $(-1, 3)$

11. 若函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

答案: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2 + x - 1, & x < 0. \end{cases}$

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x > 1, \\ (4-\frac{a}{2})x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $[4, 8)$

二、解答题:

13. 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - mx + 6 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

解 由 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 3 , 所以 $A = \{2, 3\}$.

因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$.

(1) 若 $B = \emptyset$, 则 $\Delta = m^2 - 24 < 0$, 解得 $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$.

(2) 若 $B \neq \emptyset$, 则当 B 为单元素集时, $\Delta = 0$, 解得 $m = \pm 2\sqrt{6}$.

而当 $m = 2\sqrt{6}$ 时, $B = \{x | x^2 - 2\sqrt{6}x + 6 = 0\} = \{\sqrt{6}\} \not\subseteq A$, 不合题意;

当 $m = -2\sqrt{6}$ 时, $B = \{x | x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 = 0\} = \{-\sqrt{6}\} \not\subseteq A$, 不合题意.

(3) 若 B 为双元素集, 则 $B = \{2, 3\}$, 从而 $2, 3$ 是方程 $x^2 - mx + 6 = 0$ 的两个实数根, 所以 $m = 5$.

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}) \cup \{5\}$.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是如图所示的线段 OA 与抛物线的一部分 ABC , 其中 A 点的坐标为 $(1, 3)$, 抛物线的顶点 B 在 x 轴上, 开口向上, 对称轴为直线 $x = 4$.

(1) 写出函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 写出函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(3) 若 $a > 1$, 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上的最小值.

解 (1) 由题知函数 $y = f(x)$ 的定义域为区间 $[0, +\infty)$,

所以函数 $y = f(x)$ 的单调增区间为 $[0, 1]$ 和 $[4, +\infty)$, 单调减区间为 $[1, 4]$.

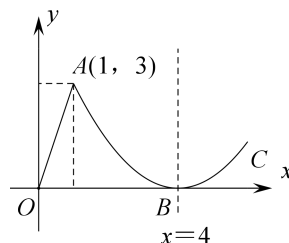
(2) 由题意, 设 $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}, & x \geq 1. \end{cases}$ (或 $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-4)^2, & x \geq 1. \end{cases}$)

(3) 若 $1 < a \leq 4$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上单调递减, 所以

当 $x = a$ 时, $f(x)$ 有最小值 $\frac{1}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{16}{3}$;

若 $a > 4$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上单调递减, 在 $[4, a]$ 上单调递增, 所以, 当 $x = 4$ 时, $f(x)$ 有最小值 0 .

综上, $y_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{16}{3}, & 1 < a \leq 4, \\ 0, & a > 4. \end{cases}$



15. 若函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 用定义证明 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数;

(3) 写出 $f(x)$ 的单调减区间, 并判断 $f(x)$ 有无最大值或最小值? 如有, 写出最大值或最小值(不需说明理由).

【解析】(1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{即 } \frac{-ax+b}{x^2+1} = -\frac{ax+b}{x^2+1}, \text{ 即 } -ax+b = -ax-b, 2b=0,$$

$$\text{所以 } b=0, \text{ 从而 } f(x) = \frac{ax}{x^2+1}.$$

$$\text{又 } f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}, \text{ 所以 } \frac{2a}{1+4} = \frac{2}{5}, \text{ 解得 } a=1.$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(2) 设 x_1, x_2 为区间 $(-1, 1)$ 上的任意两个值, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \frac{(x_1+x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

因为 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $-1 < x_1x_2 < 1, x_1 - x_2 < 0, x_1^2 + 1 > 0, x_2^2 + 1 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数.

(3) 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$.

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x)_{\min} = -\frac{1}{2}. \quad \text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(x)_{\max} = \frac{1}{2}.$$

16. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x^2 + ax, a$ 为常数.

(1) 若 $a = -2$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调减函数,

① 求实数 a 的取值范围;

② 若对任意的实数 m , 都有 $f(m-1) + f(m^2+t) < 0$ 成立, 求实数 t 的取值范围.

解 (1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 且 $a = -2$, 所以 $f(x) = -f(-x) = x^2 - 2x$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0, \\ -x^2 - 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{① 若 } a \leq 0, \text{ 则 } f(x) = -x^2 + ax = -(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4},$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调减.

因为 $\frac{a}{2} \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

由于 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减.

又在区间 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) > 0$, 所以, 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x) < 0$,
所以, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调减函数.

若 $a > 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{2}]$ 上单调增, 在区间 $[\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调减, 不合题意.

所以, 若函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调减函数, 则 a 的取值范围是区间 $(-\infty, 0]$.

②因为 $f(m-1) + f(m^2+t) < 0$, 即 $f(m-1) < -f(m^2+t)$,

又 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(m-1) < f(-t-m^2)$.

又 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调减函数, 所以, 本题等价于: 对任意的实数 m , 都有

$$m-1 > -t-m^2,$$

即

$$t > -m^2 - m + 1 = -\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

而当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $-\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ 取得最大值 $\frac{5}{4}$, 所以 $t > \frac{5}{4}$,

所以实数 t 的取值范围是区间 $(\frac{5}{4}, +\infty)$.